



marque déposée

le Calligraphe



NOMBRES & PROBABILITES

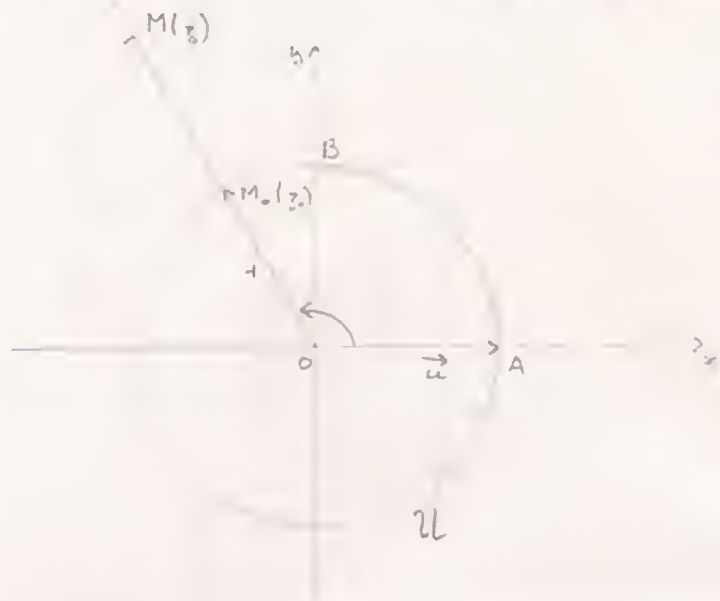
LEÇONS n° 2

COURS DE TERMINALE C
DE MME J. MANOTTE

copié et présenté par D.-J. MERCIER

1974 - 75

Plan de Moivre - Cauchy



(Fig 1)

6.1.75

9 (suite)

Nombres complexes

Argument d'un nombre complexe

(voir fig 1) $z = |z| z_0$ $|z| = r$

Argument de $z = \text{Arg } z_0$

Z

$\text{Arg } z = \text{Arg } z_0 = \text{angle}(\vec{u}, \vec{OH_0})$

$\arg z = \arg z_0 =$ une mesure réelle de l'angle précédent.

ex: $\arg z = \frac{2\pi}{3}$

Plus généralement: $\arg z = \frac{2\pi}{3} + k 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\arg \frac{2\pi}{3} \equiv \frac{2\pi}{3} \quad [2\pi]$$

7.1

$z = |z| \cdot z_0$; $|z_0| = 1$

$|z| = r$

$z_0 = \begin{bmatrix} a_0 & -b_0 \\ b_0 & a_0 \end{bmatrix}$ et $a_0^2 + b_0^2 = 1$

Si, de plus, la base (\vec{u}, \vec{v}) orthonormée utilisée pour désigner les matrices en question est directe, alors

on peut poser
$$\begin{cases} a_0 = \cos \alpha \\ b_0 = \sin \alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$$

α = une mesure de l'angle attaché à la rotation associée à z_0 .

Alors $z_0 = a_0 + b_0 i = \cos \alpha + i \sin \alpha$

d'où

$$z = r (\underbrace{\cos \alpha}_{\uparrow} + i \underbrace{\sin \alpha}_{\uparrow})$$

$$\begin{cases} a = r \cos \alpha \\ b = r \sin \alpha \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= r^2 \\ r &= \sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

d'où une classe de réels α congrus entre eux modulo 2π .

Remarque

Soit $z = a(\cos \theta + i \sin \theta)$ $(a, \theta) \in \mathbb{R}^2$

* Si $a > 0$, alors $|z| = a$

et $\arg z \equiv \theta \pmod{2\pi}$

* Si $a < 0$, alors :

$$z = -a(-\cos \theta - i \sin \theta)$$

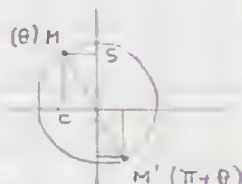
$$z = -a(\cos(\pi + \theta) + i \sin(\pi + \theta))$$

alors $|z| = -a$

et $\arg z \equiv \pi + \theta \pmod{2\pi}$

* Si $a = 0$, $z = 0$

$|z| = 0$ et $\arg z$ indéterminé.



10.1

$z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ est la forme trigonométrique de z , avec $r = |z|$ et $\alpha \equiv \arg z \pmod{2\pi}$

$$\textcircled{1} \quad z = z_1 \cdot z_2$$

$$\begin{cases} z_1 = r_1(\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1) \\ z_2 = r_2(\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2) \end{cases}$$

$$z = r_1 r_2 (\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2))$$

$$z = r_1 r_2 (\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2))$$

$z_1 z_2$ a donc $r_1 r_2$ pour module et $\alpha_1 + \alpha_2$ comme

argument.

$$\begin{cases} |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \\ \arg(z_1 \cdot z_2) \equiv \arg z_1 + \arg z_2 \quad [2\pi] \end{cases}$$

Remarque

Dans le cas où z_1 et z_2 sont de module 1, on retrouve l'isomorphisme entre \mathbb{R} multi, l'ensemble des matrices de rotations muni de \times , soit (\mathcal{O}^+, \times) , et l'ensemble des angles de ces rotations munis de $+$, soit $(\mathcal{X}, +)$

$$\text{Dans ce cas } |z_1| = r_1 = 1 \quad |z_2| = r_2 = 1 \\ z_1 z_2 = \cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2)$$

③

$$z = r (\cos \alpha + i \sin \alpha) \quad , \quad r \neq 0$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\cos \alpha + i \sin \alpha}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} (\cos \alpha - i \sin \alpha)$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} (\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha))$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} [\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha)]$$

$$\begin{cases} \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} \\ \arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg z \quad [2\pi] \end{cases}$$

③ $z = \frac{z_1}{z_2}$ et $z_2 \neq 0$ ($\alpha_2 \neq 0$)

$$z = z_1 \times \frac{1}{z_2}$$

Z

$$\begin{cases} |z| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \left| \frac{z_1}{z_2} \right| \\ \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv \arg z_1 - \arg z_2 \quad [2\pi] \end{cases}$$

donc :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \left[\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 - \alpha_2) \right]$$

④ On montre (exercice) que met :

$$|z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \dots \cdot |z_n|$$

et

$$\arg(z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n) \equiv \arg z_1 + \arg z_2 + \dots + \arg z_n$$

Alors, si $z_1 = z_2 = \dots = z_n = z$

Z

$$\begin{cases} |z^n| = n |z|^n \\ \arg(z^n) \equiv n \cdot \arg z \quad [2\pi] \end{cases}$$

$$z^n = r^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha)$$

$\uparrow \qquad \qquad \uparrow \qquad \qquad \uparrow$

Formule de
Moivre

Si $|z| = 1$, on trouve :

$$z = \cos \alpha + i \sin \alpha$$

$$z^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$$

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$$

$$n \in \mathbb{N}^*$$

Est-ce que la formule est encore valable pour $n=0$?

Oui si l'on convient que $z^0 = 1$, comme $x^0 = 1$,
 $x \in \mathbb{R}$.

De même, $n \in \mathbb{Z}$ permet-il encore la formule?

Soit $n < 0$, $\exists n' = -n > 0$, $n' \in \mathbb{N}^*$

Nous avons :

$$\begin{aligned} (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n &= \frac{1}{(\cos \alpha + i \sin \alpha)^{-n}} \\ &= \frac{1}{\cos(-n\alpha) + i \sin(-n\alpha)} \end{aligned}$$

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha) \quad [c8 \textcircled{2}]$$

La formule de moivre est donc valable $\forall n \in \mathbb{Z}$

Racines n -ièmes d'un nombre complexe. Soit $Z \in \mathbb{C}$

$$z \in \mathbb{C} \quad / \quad z^n = Z \quad , \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$Z = r (\cos \alpha + i \sin \alpha) \quad \text{donné}$$

$$z = \rho (\cos \theta + i \sin \theta) \quad \text{inconnu}$$

$$\underbrace{z^n}_{\geq 0} = \underbrace{\rho^n}_{\geq 0} (\cos n\theta + i \sin n\theta) = \underbrace{r}_{\geq 0} (\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

$$\begin{cases} \rho^n = r \\ n\theta \equiv \alpha \quad [2\pi] \end{cases}$$

Bien entendu, la 2^e ligne n'a de sens que si α est connu (voir $Z=0$, argument indéterminé)

$$\star \text{ Si } Z=0 \quad \vdash \quad r=0 \quad \vdash \quad \rho=0 \quad \vdash \quad z=0$$

$$\text{et } \underline{z^n = 0 \quad \vdash \quad z=0}$$

$$\star \text{ Si } Z \neq 0, \quad z^n = Z$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} > 0 \\ n\theta \equiv \alpha \quad [2\pi] \end{cases}$$

$$n\theta = \alpha + k \cdot 2\pi$$

$$\theta = \frac{\alpha}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}$$

n classes de réels θ .

$$\left\{ \frac{\alpha}{n} ; \frac{\alpha+2\pi}{n} ; \dots ; \frac{\alpha+(n-1)2\pi}{n} \right\}$$

$\exists n$ classes, mod. 2π , pour les arguments trouvés.

Z

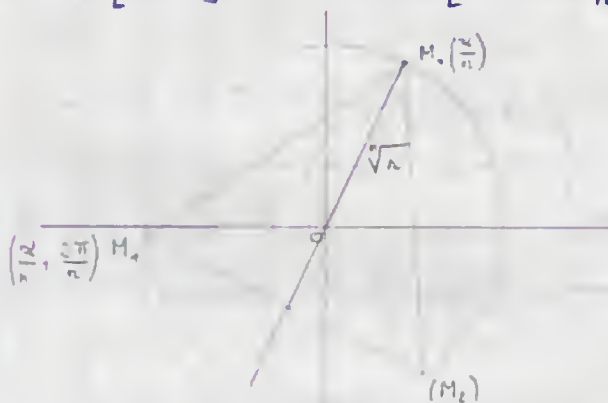
$$z = \sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\alpha}{n} + k \frac{2\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\alpha}{n} + k \frac{2\pi}{n} \right) \right)$$

$$k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

En abrégé, on écrit souvent :

$$Z = [r, \alpha]$$

$$z = \left[\sqrt[n]{r}, \frac{\alpha}{n} + k \frac{2\pi}{n} \right]$$



Résumé

1) $Z=0$, $\exists! z=0 / z^n=Z$

2) $Z \neq 0$, $\exists n$ racines n -ièmes de Z , soit $z / z^n=Z$

$$z = \left[\sqrt[n]{r}, \frac{\alpha}{n} + k \frac{2\pi}{n} \right], k \in [0, n-1] \cap \mathbb{N}$$

Racines cubiques du nombre -1

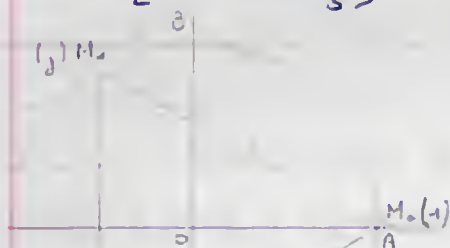
$$Z=1 = [1, 0]$$

$$\text{Arg } 1 = \omega \text{ (angle nul)}$$

$$z^3 = Z = 1$$

$$z = \left[1, 0 + k \frac{2\pi}{3} \right]$$

$$k \in \{0, 1, 2\}$$



$$j = \left[1, \frac{2\pi}{3} \right]$$

$$(j^2) = \left(\frac{1}{j} \right) \text{ ou } \left(\frac{1}{j} \right)$$

L'ensemble des racines cubiques de 1 est $E = \{1, j, j^2\}$

L'équation du 3-degré $z^3 = 1$ devient.

$$z^3 - 1 = 0$$

$$(z-1) \underbrace{(z^2 + z + 1)}_{\text{racines } j \text{ et } j^2} = 0$$

Z

$$1 + j + j^2 = 0$$

Un isomorphisme remarquable :

$$\gamma : (E, \times) \longrightarrow (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$$

$$1 \longmapsto \gamma(1) = \dot{0}$$

$$j \longmapsto \gamma(j) = \dot{1}$$

$$j^2 \longmapsto \gamma(j^2) = \dot{2}$$

$$1 \times j^2 \longmapsto \dot{2} = \dot{0} + \dot{2}$$

$$1 = j \times j^2 \longmapsto \dot{0} = \dot{1} + \dot{2} \quad \text{oui}$$

$$\forall z \in E \quad \text{et} \quad \dot{x} \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$

$$\gamma(z \times z') = \dot{x} + \dot{x}' = \gamma(z) + \gamma(z')$$

γ est un homomorphisme de (E, \times) dans $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$.

Comme γ est bijectif, c'est un isomorphisme de (E, \times) sur $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$

Remarque.

$$z^3 = 1 \quad (\text{donné}) \quad z^3 = ?$$

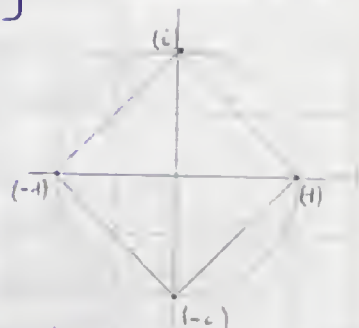
Si on a la chance de connaître l'une des 3 racines cubiques, on trouve les 2 autres en multipliant celle qui est connue par les 2 racines cubiques non réelles de l'unité

Remarque

$$\begin{cases} j = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = \left[1, \frac{2\pi}{3} \right] & \cos \frac{2\pi}{3} = 2 \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} \\ j^2 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} = \left[1, \frac{4\pi}{3} \right] \end{cases}$$

Racines quatrièmes de 1,

$$E' = \{ 1 ; i ; -1 ; -i \}$$



$$\varphi: (E', \times) \longrightarrow (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$$

φ = homomorphisme de groupe (bijectif)

Utilisation de la formule de Moivre ~~et~~ ^{cos} la trigonométrie

① Rappel

$$\begin{cases} \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \\ \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} \end{cases}$$

②

$$\cos 3a = \cos (2a + a)$$

$$= \cos 2a \cdot \cos a - \sin 2a \cdot \sin a$$

$$= (\cos^2 a - \sin^2 a) \cos a - 2(\sin a \cos a) \sin a$$

$$\cos 3a = \cos^3 a - 3 \sin^2 a \cdot \cos a$$

$$\cos 3a = \cos^3 a - 3 \underbrace{\sin^2 a}_{1-\cos^2 a} \cos a$$

$$\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a$$

$$\cos^3 a = \frac{1}{4} \cos 3a + \frac{3}{4} \cos a$$

Idem pour $\sin^3 a$.

$$\textcircled{3} \quad \cos^n a ? \quad \sin^n a ?$$

On cherche à "linéariser" ces monômes de degré n .

$$\begin{cases} \zeta = \cos \theta + i \sin \theta & |\zeta| = 1 \\ \bar{\zeta} = \cos \theta - i \sin \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \zeta^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \\ \bar{\zeta}^n = \cos n\theta - i \sin n\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \zeta + \bar{\zeta} = 2 \cos \theta \\ \zeta - \bar{\zeta} = 2i \sin \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \zeta^n + \bar{\zeta}^n = 2 \cos n\theta \\ \zeta^n - \bar{\zeta}^n = 2i \sin n\theta \end{cases}$$

On note que $\boxed{\zeta \bar{\zeta} = 1}$

$$(z + \bar{z})^n = z^n + n z^{n-1} \bar{z} + C_n^2 z^{n-2} \bar{z}^2 + \dots \\ \dots + C_n^{n-2} z^2 \bar{z}^{n-2} + n z \bar{z}^{n-1} + \bar{z}^n$$

$$\text{Or } C_n^{n-p} = C_n^p$$

$$C_n^{n-2} = C_n^2, \text{ etc } \dots$$

$$(z + \bar{z})^n = (z^n + \bar{z}^n) + n \underbrace{z \bar{z}}_1 (z^{n-2} + \bar{z}^{n-2}) + \dots$$

$$\dots + C_n^k \underbrace{z^k \bar{z}^k}_1 (z^{n-2k} + \bar{z}^{n-2k}) + \dots \quad (k < n-k)$$

Suivant la parité de n , on trouve un dernier terme constant (n pair) ou un dernier terme renfermant en facteurs $z^k + \bar{z}^k$.

Les sommes $z^k + \bar{z}^k$ seront remplaçables par $2 \cos k\theta$ (1-degré en cosinus).

$$\text{Par ailleurs, } (z + \bar{z})^n = 2^n \cos^n \theta$$

D'où :

$$2^n \cos^n \theta = 2 \cos n\theta + 2n \cos(n-2)\theta + \dots$$

$$\cos^n \theta = \frac{1}{2^{n-1}} \cos n\theta + \frac{1}{2^{n-1}} n \cos(n-2)\theta + \dots$$

Exemple $= n = 4$

$$z + \bar{z} = 2 \cos \theta$$

$$(z + \bar{z})^4 = 2^4 \cos^4 \theta$$

$$\begin{aligned} z^4 + 4 z^3 \bar{z} + 6 z^2 \bar{z}^2 + 4 z \bar{z}^3 + \bar{z}^4 &= 2^4 \cos^4 \theta \\ 2 \cos 4\theta + 4 \cdot 2 \cos 2\theta + 6 &= 2^4 \cos^4 \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^4 \cos^4 \theta &= 2 \cos 4\theta + 8 \cos 2\theta + 6 \\ \cos^4 \theta &= \frac{1}{8} \cos 4\theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Pour $\sin^n \theta$, on utilise :

$$z - \bar{z} = 2i \sin \theta$$

$$(z - \bar{z})^n = 2^n i^n \cdot \sin^n \theta$$

$$\text{ex: } n = 3$$

$$(z - \bar{z})^3 = 2^3 i^3 \cdot \sin^3 \theta$$

$$z^3 - 3 z^2 \bar{z} + 3 z \bar{z}^2 - \bar{z}^3 = 2^3 (-i) \cdot \sin^3 \theta$$

$$(z^3 - \bar{z}^3) - 3(z \bar{z})(z - \bar{z}) = 2^3 (-i) \sin^3 \theta$$

$$2i \sin 3\theta - 3 \cdot 2i \sin \theta = 2^3 (-i) \sin^3 \theta$$

$$\sin^3 \theta = -\frac{1}{4} \sin 3\theta + \frac{3}{4} \sin \theta$$

Ces de polynômes trigonométriques

$$\text{Soit } P(a) = \cos^4 a \sin^2 a + \sin^3 a$$

En remplaçant chaque puissance par une des expressions données ci-dessus, on arrive à des termes :

* ou du premier degré en sinus ou cosinus

* ou à $\cos 4a \cdot \cos 2a$

Se souvenir alors de :

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

$$\theta = a$$

$$P(a) = \left(\frac{1}{8} \cos 4\theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{3}{8} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2a \right) + \sin^3 a$$

$$P(a) = \frac{1}{16} \cos 4a + \frac{1}{4} \cos 2a + \frac{3}{16} - \frac{1}{16} \cos 4a \cdot \cos 2a \\ - \frac{1}{4} \cos^2 2a - \frac{3}{16} \cos 2a + \sin^3 a$$

$$P(a) = \frac{1}{16} \cos 4a + \frac{1}{4} \cos 2a + \frac{3}{16} - \frac{1}{16} [\cos 2a + \cos 6a] \\ - \frac{1}{4} \left(\frac{1 + \cos 4a}{2} \right) - \frac{3}{16} \cos 2a + \sin^3 a$$

$$P(a) = \frac{1}{16} \cos 4a + \frac{1}{4} \cos 2a + \frac{3}{16} - \frac{1}{16} \cos 2a - \frac{1}{16} \cos 6a \\ - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cos 4a - \frac{3}{16} \cos 2a + -\frac{1}{4} \sin 3a + \frac{3}{4} \sin a$$

$$P(a) = -\frac{1}{16} \cos 6a - \frac{1}{16} \cos 4a - \frac{1}{4} \sin 3a + \frac{3}{4} \sin a + \frac{1}{16}$$

Soit Ω l'univers des éventualités (ou événements élémentaires)

On le considère Ω fini (cf programme)

$\mathcal{B}(\Omega)$ = ensemble des parties de Ω

$$\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \omega_3; \dots; \omega_n\}$$

$$A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_7\} \quad A \subset \Omega$$

et $A \in \mathcal{B}(\Omega)$

A est un événement qui se produira sous l'influence

soit de ω_2

soit de ω_4

soit de ω_7 .

On travaillera toujours avec une partie de $\mathcal{B}(\Omega)$ (éventuellement confondue avec elle). Soit $\mathcal{B}(\Omega)$ définie

ainsi: 1° $\mathcal{B}(\Omega) \neq \emptyset$

2° $A \in \mathcal{B}(\Omega) \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{B}(\Omega)$

$$\bar{A} = \begin{cases} A \\ \Omega \end{cases} ; \begin{cases} A \cup \bar{A} = \Omega \\ A \cap \bar{A} = \emptyset \end{cases}$$

3° $\left. \begin{matrix} A \in \mathcal{B}(\Omega) \\ B \in \mathcal{B}(\Omega) \end{matrix} \right\} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{B}(\Omega)$

Donc $\mathcal{B}(\Omega)$, non vide, est stable pour la complémentation et pour la réunion; $\mathcal{B}(\Omega)$ est dite une tribu.

$$\text{ex: } \{\Omega, \emptyset\}$$

$$\{\Omega, A, \bar{A}, \emptyset\}$$

Conséquences:

$$1^\circ) \Omega \in \mathcal{B}(\Omega)$$

$$\text{En effet } \mathcal{B}(\Omega) \neq \emptyset \mid \exists A \mid \bar{A} \in \mathcal{B}(\Omega)$$

$$A \text{ et } \bar{A} \in \mathcal{B}(\Omega) \mid A \cup \bar{A} = \Omega \in \mathcal{B}(\Omega)$$

$$2^\circ) \emptyset \in \mathcal{B}(\Omega) \text{ car } \emptyset = \bar{\Omega}$$

$$3^\circ) \left. \begin{array}{l} A \in \mathcal{B}(\Omega) \\ B \in \mathcal{B}(\Omega) \end{array} \right\} \mid A \cap B \in \mathcal{B}(\Omega)$$

$$\text{En effet } \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \quad (\text{Loi de Morgan})$$

$$N(p \wedge q) \iff Np \vee Nq$$

$$A \in \mathcal{B}(\Omega) \mid \bar{A} \in \mathcal{B}(\Omega)$$

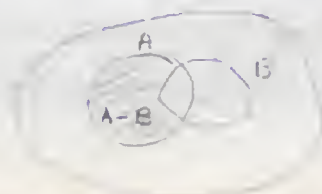
de même pour B

$$\bar{A} \cup \bar{B} \in \mathcal{B}(\Omega)$$

$$\overline{\bar{A} \cup \bar{B}} = \bar{\bar{A}} \cap \bar{\bar{B}} = A \cap B \in \mathcal{B}(\Omega)$$

CQFD

$$4^\circ) A - B \in \mathcal{B}(\Omega) \text{ dès que } A \text{ et } B \in \mathcal{B}(\Omega)$$



$$A - B = A \cap \bar{B}$$

$$\left. \begin{array}{l} 5^\circ / A \in \mathcal{B}(\Omega) \\ B \in \mathcal{B}(\Omega) \end{array} \right\} \rightarrow A \Delta B \in \mathcal{B}(\Omega)$$

$\Delta =$ diff. symétrique de A et B

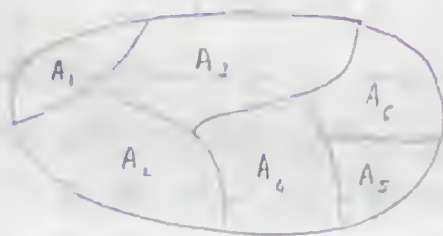
$$A \Delta B = \underbrace{(A-B)}_{\in \mathcal{B}(\Omega)} \cup \underbrace{(B-A)}_{\in \mathcal{B}(\Omega)}$$

CQFD

Remarques

* $\mathcal{P}(\Omega) =$ tribu

* Soit une partition de Ω .



Partition = $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$
 \neq
 tribu

Cependant, on peut faire une tribu en adjoignant
 aux $A_i, i \in [1, \dots, 6]$, 2 autres réunions des A_i .

Un espace Ω muni d'une tribu $\mathcal{B}(\Omega)$ est dit espace probabilisable.

On introduit alors une probabilité.

Définition d'une probabilité

$$p : \mathcal{B}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$\Omega \longmapsto 1$$

$$A \cap B = \emptyset \quad \begin{cases} A \longmapsto p(A) = p_1 \\ B \longmapsto p(B) = p_2 \end{cases}$$

$$A \cup B \longmapsto p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

$$* p(\Omega) = 1$$

* Probabilité des axiomes totales:



$$A \cap B = \emptyset \longmapsto p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

$$p(A) \geq 0, \quad \forall A \in \mathcal{B}(\Omega)$$

$$p(\Omega) = 1$$

$$A \cap B = \emptyset \longmapsto p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

Remarque: $C = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ éventualités incompatibles.

$$p(C) = p(\omega_1) + p(\omega_2) + p(\omega_3)$$

Conséquences:

$$\rightarrow p(\emptyset) ?$$

$$\Omega \cap \emptyset = \emptyset \quad \Omega \cup \emptyset = \Omega$$

$$p(\Omega) = p(\Omega \cup \emptyset) = p(\Omega) + p(\emptyset)$$

$$p(\emptyset) = 0$$

$$\rightarrow p(A) = p, \quad p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$

$$p(A) + p(\bar{A}) = p(A \cup \bar{A})$$

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$

Si $A \subset B$, la réalisation de A entraîne alors celle de B .

$$\text{De plus } A \cap \left[\underset{B}{A} \right] = \emptyset$$

$$A \cup \left[\underset{B}{A} \right] = B$$

$$\text{donc } p(B) = p(A) + \underbrace{p\left(\left[\underset{B}{A} \right]\right)}_{\geq 0}$$

$$A \subset B \vdash p(A) \leq p(B)$$

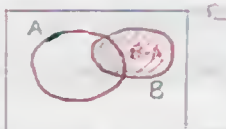
$$\text{ex: } A \subset \Omega \vdash p(A) \leq 1, \quad \forall A \subset \mathcal{B}(\Omega)$$

$$\forall A \in \mathcal{F}, \quad 0 \leq p(A) \leq 1$$

26.5

Cas de 2 événements non incompatibles

$$A \cap B \neq \emptyset$$



$$\begin{aligned} p(A \cup B) &= p(A \cup (B-A)) \\ &= p(A) + p(B-A) \end{aligned}$$

$$p(B-A) = ?$$

$$B = (B-A) \cup (A \cap B)$$

$$p(B) = p(B-A) + p(A \cap B)$$

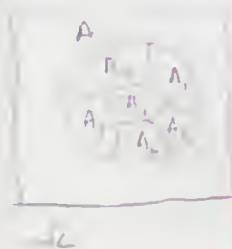
$$p(B-A) = p(B) - p(A \cap B)$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Cas où $A, A \in \mathcal{F}$, est la réunion de A_i ; les A_i formant une partition de A .

$$p(A) = \sum_{i=1}^n p(A_i)$$

Si $A = \Omega$, et si les A_i sont les $\{\omega_i\}$.



$$p(\Omega) = 1 = \sum_{i=1}^n p(\omega_i)$$

Dans le cas de l'équiprobabilité, alors $1 = n \cdot p(\{\omega_i\})$

$$p(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}$$

Toujours avec la même hypothèse, si $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, alors $p(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = \frac{3}{n}$

$$\begin{aligned} \text{car } p(A) &= p(\omega_1) + p(\omega_2) + p(\omega_3) \\ &= 3p(\omega_i) = 3 \times \frac{1}{n} . \end{aligned}$$

Exercices

Sac: 4 boules noires

5 b rouges

6 b blanches

On tire 1 boule au hasard ;

$$p(A) = p(\text{b rouge}) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} p(B) &= p(\text{blanche ou noire}) = \frac{6+4}{15} \\ &\text{ou } = \frac{6}{15} + \frac{4}{15} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Remarque: } \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

$$B = \bar{A}$$

(2)

Population de 100 personnes.

(B) 45 blondes

(Y) 40 aux yeux bleus

25 blondes aux yeux bleus.

On choisit une personne au hasard

probabilité pour qu'elle ait ~~aux~~ moins un des caractères ci-dessus ?

$$P = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = \frac{?}{100}$$

$$\text{card } A = \text{card}(B \cup Y) = \text{card } B + \text{card } Y - \text{card } B \cap Y$$

$$\text{card } A = 45 + 40 - 25 = 60$$

$$P = \frac{60}{100} = 0,6$$

(3)

Sac : 4 boules rouges

6 " noires

2 boules sont tirées successivement. Quelle est la probabilité p pour que la première soit rouge, la 2^e noire, si la première re bille est ou non remise dans le sac ~~après~~ avant la 2^e

tirage ?

* la 1^{re} boule tirée est remise.



$$p(A \cap B) = \frac{4 \times 6}{100} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

$$= \frac{4}{10} \times \frac{6}{10}$$
$$= p(A) \times p(B)$$

$$p(A) = p(\text{tirage de une rouge})$$

$$p(B) = p(\text{ " de une noire})$$

* la 1^{re} boule tirée n'est pas remise.

$$\text{Nombre de cas possibles} = 90 = 10 \times 9$$

$$\text{Nombre de cas favorables} = 24 = 4 \times 6$$

$$p(A \cap B) = \frac{24}{90} = \frac{4}{10} \times \left(\frac{6}{9}\right) = p(A) \times p(B/A)$$

$$p(B/A) = p \text{ de } B \text{ si } A$$

$$p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

(4)

3 questions d'oral: $\begin{cases} 10 \text{ d'algèbre} \\ 7 \text{ de trigo} \\ 5 \text{ d'arithmétique} \end{cases}$

* Probabilité pour que les 3 tirés soient d'algèbre ?
(tirages successifs sans remise)

$$p(A_1) = \frac{10}{22}$$

$$p(A_2 \cap A_1) = p(A_1) \cdot p(A_2/A_1)$$

on ne distingue
pas les objets d'A1

$$p(A_2/A_1) = \frac{9}{21}$$

$$p(\underbrace{A_2 \cap A_1}_B) = \frac{10}{22} \times \frac{9}{21}$$

$$\begin{aligned} p(A_3 \cap B) &= p(B) \cdot p(A_3/B) \\ &= p(B) \cdot \frac{8}{20} \end{aligned}$$

$$= \frac{10}{22} \times \frac{9}{21} \times \frac{8}{20} = \frac{6}{77}$$

$$p = p(A_3 \cap A_2 \cap A_1) \approx 0,077$$

$$\approx 0,08 \quad \approx 1/100 \text{ près}$$

* p pour que le candidat tire, dans cet ordre, 1 objet d'alg, 1 objet de trigo, 1 d'arithmétique.

si on tire, 13'

$$P = \frac{10}{22} \times \frac{7}{21} \times \frac{5}{20}$$

29.5

11

Applications mesurables

(ou variables aléatoires discrètes)

(ou aléas numériques)

$$X : \underset{\substack{\text{esp. probabilisé} \\ \text{fini}}}{\Omega} \longrightarrow \underset{\substack{\text{esp. probabilisable} \\ \text{fini}}}{\Omega'}$$

$$(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), p).$$

$$(\Omega', \mathcal{B}(\Omega'))$$

X est dite variable aléatoire si :

- (*) $\forall A' \in \mathcal{B}(\Omega')$, son image réciproque par X, soit $X^{-1}(A')$, est élément de $\mathcal{B}(\Omega)$.

$$\underline{X^{-1}(A') \in \mathcal{B}(\Omega)}$$

On montre que X est surjective.Si oui, $X(\Omega) = \Omega'$

et inversement.

$$* X(\Omega) \subset \Omega'$$

$$* \Omega' \in X(\Omega) ?$$

$$\text{ou } \Omega' \in \mathcal{B}(\Omega')$$

$$\text{Est-ce que } \mathcal{B}(\Omega') \subset \mathcal{P}(X(\Omega)) ?$$

oui (voir définition (*))

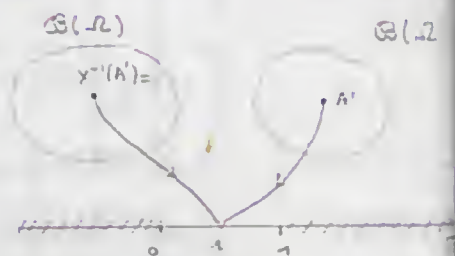
$$\text{Donc } \Omega' \subset X(\Omega)$$

$$\Omega' = X(\Omega)$$

et X est surjective.

Maintenant, on va définir une probabilité $(\Omega', \mathcal{B}(\Omega'))$ comme suit

$$p'(A') \stackrel{\downarrow}{\stackrel{\uparrow}{=}} p(X^{-1}(A'))$$



p' est effectivement une probabilité puisque :

$$p' : \mathcal{B}(\Omega') \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$p'(\Omega') = p(X^{-1}(\Omega))$$

$$\text{or } X : \Omega \rightarrow \Omega'$$

est-ce que $X^{-1}(\Omega') = \Omega$? oui (admis)

$$\text{or } p(\Omega) = 1 \text{ donc } p'(\Omega') = 1.$$

axiome des probabilités totales

$$\left. \begin{aligned} p'(A' \cup B') &= p(A') + p(B') \\ \text{si } A' \cap B' &= \emptyset \end{aligned} \right\}$$

$$\text{or } p'(A' \cup B') = p(X^{-1}(A' \cup B'))$$

$$= p[X^{-1}(A') \cup X^{-1}(B')]$$

$$= p(X^{-1}(A')) + p(X^{-1}(B'))$$

car images réciproques disjointes elles aussi

On appelle probabilité-image, l'application de $\mathcal{B}(\Omega)$ (ou $\mathcal{B}(\Omega')$) vers $[0, 1]$ ainsi γ s définit: à tout événement A' (sous-ensemble) de Ω' on associe la probabilité $p(A)$ de l'événement A , de Ω , formé de toutes les éventualités dont les images, par X , ont des éléments de A' .

Donc
$$p'(A' \cup B') = p'(A') + p'(B')$$

cui

p' est dite "probabilité image" de p par X .

Ω comprend 32 éléments.

$$\Omega' \subset \mathbb{R} ; X(\Omega) = \Omega'$$

X = variable aléatoire *réelle*
ou aléa numérique.

X : tirage d'un as $\longrightarrow 4$

" roi $\longrightarrow 3$

" dame $\longrightarrow 2$

" valet $\longrightarrow 1$

" carte \mathcal{C} $\longrightarrow 0$

$$\Omega' = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

On muni évidemment Ω' d'une tribu $\mathcal{B}(\Omega')$, par exemple $\mathcal{B}(\Omega') = \{ \emptyset; \{1\}; \dots; \{2, 3, 4\}; \dots; \Omega' \}$

$$p(R) = p'(3) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

$$p(\mathcal{C}) = p'(0)$$

Ex de Probabilité (dans cet exercice)
(Distribution de probabilité)

X	0	1	2	3	4
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Ce tableau montre la loi de probabilité de la variable aléatoire X

Théorèmes admet

On démontre que l'ensemble des variables aléatoires construites sur le même ensemble Ω est :

1° un espace vectoriel sur \mathbb{R} $(\mathcal{V}, +, \cdot)$

2° un anneau commutatif unitaire $(\mathcal{V}, +, \cdot)$

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega_i \longmapsto X(\omega_i) = r$$

$$\lambda X : \omega_i \longmapsto \lambda X(\omega_i) = \lambda r$$

$$Y : \omega_i \longmapsto Y(\omega_i) = r'$$

$$\lambda X + \mu Y : \omega_i \longmapsto (\lambda X + \mu Y)(\omega_i) = \lambda r + \mu r'$$

$$\underset{\text{int}}{X \cdot Y} : \omega_i \longmapsto (XY)(\omega_i) = r r'$$

$$\underset{\text{v.a.a. unit.}}{e} : \omega_i \longmapsto e(\omega_i) = 1, \quad \forall \omega_i \in \Omega$$

Function de répartition

On dit que X "prend" les valeurs x_1, x_2, \dots, x_m .

On les classe par ordre croissant.

$$x_1 < x_2 < \dots < x_{m-1} < x_m$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = p(X < x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = p(X < x)$$

$$\text{Si } x \leq x_1, F(x) = 0$$

$$x > x_m, F(x) = 1$$

$$\text{Si } x_1 < x \leq x_2, F(x) = p(x_1)$$

$$x = x_{m-1}, F(x) = p(x_1) + p(x_2) + \dots + p(x_{m-2})$$

⋮

$$x_{m-1} < x \leq x_m, F(x) = 1 - p(x_m)$$

$$F(b) - F(a) = p[a \leq X < b]$$

$$(a < b)$$

$$\text{En effet, } F(b) = p(X < b)$$

$$= p[(X < a) \cup (a \leq X < b)]$$

$\swarrow \quad \searrow$
 incompatibles

$$F(b) = \underbrace{p(X < a)}_{F(a)} + p(a \leq X < b)$$

ou

1 jet de 2 pièces de monnaie.

Z = v.a.r. relative à "nombre de faces obtenues"

Nombre de cas possibles : $\left\{ \underbrace{PP}_0 ; \underbrace{PF}_1 ; \underbrace{FP}_1 ; \underbrace{FF}_2 \right\}$ (4)

Z	0	1	2
$p(Z)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$F(z)$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

\bigwedge
0

\bigwedge
 $\frac{1}{4}$

\bigwedge
 $\frac{3}{4}$

→ Graphique de p (distribution de probabilité)

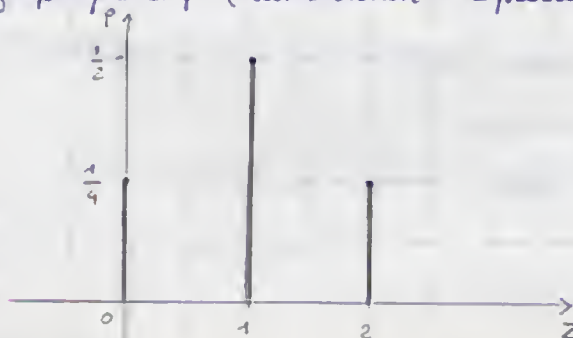
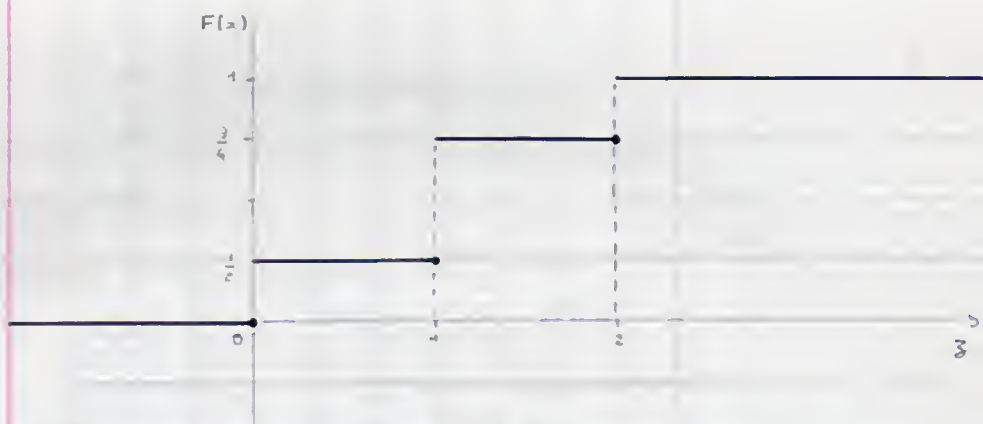


diagramme en bâtons
(cf distribution de probabilité)



courbe cumulative

(représentation graphique de la fct de répartition)

F est une fct en escalier continue $\forall x \in \mathbb{R} - \{0, 1, 2\}$

Continue à gauche aux points 0, 1, et 2.

Espérance mathématique, relativement à une variable aléatoire X

$$E(X) = \bar{X} \quad (\text{x barre}) = \sum_{i=1}^n p_i x_i$$

p_i = probabilité affectée à $\omega_i \in \Omega$

$$x_i = X(\omega_i)$$

$$\text{ex: } \omega_1 \mapsto x_1$$

$$\omega_3 \mapsto x_1$$

$$\omega_2 \mapsto x_1$$

$$\omega_4 \mapsto x_2$$

$$\omega_5 \mapsto x_2$$

$$\omega_6 \mapsto x_3$$

$$E(X) = \bar{X} = x_1 p(\omega_1) + x_1 p(\omega_2) + x_1 p(\omega_3) + x_2 p(\omega_4) + x_2 p(\omega_5) + x_3 p(\omega_6)$$

Tout se passe comme si on avait pondéré les x_i par les coefficients $p_i = p(\omega_i)$, et $\sum_{i=1}^n p_i = 1$

$$\bar{X} = x_1 [p'(X=x_1)] + x_2 [p'(X=x_2)] + x_3 [p'(X=x_3)]$$

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{m=3} x_i \cdot p'(X=x_i)$$

$$\begin{cases} n = \text{Card } \Omega, & \text{ici } n=6 \\ m = \text{Card } X(\Omega), & \text{ici } m=3 \end{cases}$$

Résumé :

$\{X, Y\}$ = ens. de 2 v.a.n. ~~soient~~ au même cod

$$Z = \lambda X + \mu Y$$

$$E(Z) = \sum_{i=1}^n p(\omega_i) (\lambda x_i + \mu y_i)$$

$$E(Z) = \lambda \sum_{i=1}^n p(\omega_i) x_i + \mu \sum_{i=1}^n p(\omega_i) y_i$$

$$E(Z) = \lambda E(X) + \mu E(Y)$$

$$\bar{Z} = \lambda \bar{X} + \mu \bar{Y}$$

$$E : \begin{array}{c} V \\ \text{esp. vect. des} \\ \text{var} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \mathbb{R} \\ \text{esp. vect.} \end{array}$$

$E =$ forme linéaire définies sur V

Exemple 1: variable aléatoire discrète

$$X_0 : \omega_1 \mapsto x_0 = X_0(\omega_1)$$

$$\omega_2 \mapsto x_0 = X_0(\omega_2)$$

...

$$\omega_n \mapsto x_0 = X_0(\omega_n)$$

$$\bar{X}_0 = E(X_0) = x_0 \left[\overbrace{p(\omega_1) + p(\omega_2) + \dots + p(\omega_n)}^1 \right]$$

$$E(X_0) = x_0$$

Si on cherche $E(\bar{X}_0) = E(\underbrace{x_0}_{\substack{\text{v.a.r.} \\ \text{constante}}}) = \bar{X}_0$

$$E(\bar{X}_0) = \bar{X}_0$$

Remarque:

$X - \bar{X}$ est une v.a.r. particulière.

$$E(X - \bar{X}) = E(X) - E(\bar{X})$$

$$= \bar{X} - \bar{X} = 0$$

$$E(X - \bar{X}) = 0$$

$X - \bar{X}$ s'appelle la variable aléatoire centrée associée à X (\bar{X} est une sorte de moyenne qui nous

un nouveau réel auquel on se réfère pour calculer les nouvelles valeurs prises par la nouvelle variable).

Variance

Z

$$V(X) = E[(X - \bar{X})^2]$$

La variance est l'espérance du carré de la variable aléatoire centrée associée à X .

2^e forme:
$$V(X) = E(X^2 - 2X\bar{X} + \bar{X}^2)$$

voir anneau commutatif des s.a. réelles

$$= E(X^2) - 2\bar{X} E(X) +$$

$$= E(X^2) - 2\bar{X} \cdot \bar{X} + \bar{X}^2$$

Z

$$V(X) = E(X^2) - \bar{X}^2$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Ecart-type

Z

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Remarque

$$\textcircled{1} \quad v(\lambda X) = E[(\lambda X - \overline{\lambda X})^2] \quad \overline{\lambda X} = E(\lambda X) = \lambda E$$
$$= \lambda$$

$$= E[(\lambda X - \lambda \bar{X})^2]$$

$$= E[\lambda^2 (X - \bar{X})^2]$$

$$v(\lambda X) = \lambda^2 E[(X - \bar{X})^2]$$

Donc

$$v(\lambda X) = \lambda^2 v(X)$$

$$\textcircled{2} \quad v(\underbrace{X+h}_{cte}) = E[(X+h - (\bar{X}+h))^2] \quad \overline{X+h} = \bar{X} +$$

$$v(X+h) = v(X)$$

3.6

17

Épreuves répétées (ou tirage de Bernoulli)

* 2 éventualités et 2 seulement.

n épreuves ou expériences

elles sont toutes indépendantes les une des autres.

On cherche à calculer la probabilité P pour qu'il y ait k succès, sur les n épreuves.

On donne p la probabilité pour qu'il y ait 1 succès au bout d'une épreuve.

($q = 1 - p$ = probabilité pour 1 échec)

ex: on jette à pile ou face 10 fois.

On demande $P(X = k)$

$$k \in [0, 10] \cap \mathbb{N}$$

.....

P_1 d'avoir ce dérivé : $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7$

Et il y a C_{10}^3 distributions analogues :

ex.

$$P_2 = P_1$$

$$P = C_{10}^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} \cdot \frac{1}{2^{10}}$$

$$\frac{10 \cdot 8 \cdot 3}{2} \cdot \frac{1}{2^{10}}$$

$$10 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2^{10}}$$

$$\frac{30}{2^5} = \frac{15}{2^2} = \frac{15}{128} \approx 0,12$$

On peut remplacer le jeu de pile ou face à le jeu de dés avec $p = \frac{1}{6}$ (pour tirer le 4).

$$q = \frac{5}{6} \text{ (pour ne pas tirer le 4)}$$

alors $\underbrace{P(X=5)}_{\text{en 10 jets}} = C_{10}^5 \left(\frac{1}{6}\right)^5 \times \left(\frac{5}{6}\right)^5$

Z

Plus généralement

$$\text{prob}(X = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

l'espérance mathématique de la variable aléatoire X associée à l'ensemble des n épreuves le nombre k de succès.

1° On peut faire le calcul classique.

$$E(X) = \sum_{k=0}^n k \underbrace{C_n^k p^k (1-p)^{n-k}}_{x_i}$$

d'ailleurs:

$$k C_n^k = n C_{n-1}^{k-1} \quad E(X) = \sum_{k=1}^n n C_{n-1}^{k-1} p^k q^{n-k} = np \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-1-(k-1)} = np$$

⊗ 2° On peut aussi regarder l'une des $\frac{10}{n}$ épreuves;
chercher son espérance :

$$p \times 1 + (1-p) \times 0 = p$$

Le nombre de succès, au cours des $\frac{10}{n}$ épreuves est égal à la somme des nombres obtenus (0 ou 1) à chacune.
L'espérance de cette somme sera donc la somme des n espérances, chacune valant p .

$$E(X) = np$$

$$\text{Variance } V(X) = E(X^2) - \bar{X}^2$$

$$\bar{X} = np$$

$$X = \sum_{i=1}^n X_i$$

$$X^2 = \left(\sum X_i \right)^2$$

$$X^2 = \sum X_i^2 + 2 \sum X_i X_j$$

$$E(X^2) = \underbrace{E\left(\sum X_i^2\right)}_{np} + 2 \underbrace{E\left(\sum X_i X_j\right)}_{\sum (E(X_i X_j))}$$

L'espérance du produit est égale, dans le cas de 2 variables aléatoires indépendantes, au produit des espérances

$$\begin{aligned} \text{C'est le cas ici donc } E(X_i \cdot X_j) &= E(X_i) \cdot E(X_j) \\ &= p \times p = p^2 \end{aligned}$$

$$(p+q)^n = np.$$

De ces produits, il y en a C_n^2 . On doit les ajouter.

$$2 \sum E(X_i \cdot X_j) = 2p^2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = p^2 n(n-1)$$

$$E(X^2) = np + p^2 n(n-1)$$

$$V(X) = E(X^2) - \bar{X}^2$$

$$= np + n(n-1)p^2 - n^2 p^2$$

$$= np - np^2$$

$$V(X) = np \underbrace{(1-p)}_q$$

$$V(X) = npq$$

Résumé : la loi de probabilité donnant $P = \text{prob.}$ est facile à retenir si l'on observe que le réel $C_n^k p^k q^{n-k}$ est le terme général du développement du binôme de Newton $(p+q)^n = p^n + C_n^1 p^{n-1} q^1 + \dots + C_n^k p^k q^{n-k} + \dots + q^n$ et $p^n = C_n^0 p^n q^0$
 $q^n = C_n^n p^0 q^n$

On dit que la loi en question (ou distribution) est binômiale. Le lecteur doit retenir les formules :

$$\begin{cases} P(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k} \\ E(X) = np \\ V(X) = npq \end{cases}$$

avec n épreuves

p = probabilité pour 1 succès

$$q = 1 - p$$

Sources

Un central téléphonique dessert 100 postes. On a pu estimer que la probabilité qu'un poste donné appelle le central durant 1 mn est $0,04 = p$, quel que soit ce poste et quel que soit la mn durant 1h de travail. On admet que les différents appels sont indépendants et on appelle X le nombre de postes qui appellent le central durant une minute donnée. Distribution de probabilité de X et calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.

$$P(X=k) = C_{100}^k (0,04)^k \times (0,96)^{100-k}$$

$$E(X) = 100 \times 0,04 = 4$$

$$V(X) = 4 \times 0,96 = 3,84 \quad \sigma = 1,96$$

(Voir aussi Belin n°47p408)

$X = v.a.r.$ à valeurs positives au sens large

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n$$

$$(p_1) \quad (p_2) \quad (p_3) \quad \dots \quad (p_n)$$

$$\begin{aligned} E(X) &= p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + x_n p_n \\ &= \sum_{i=1}^n p_i x_i \end{aligned}$$

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ / ou bien $a \leq x_1$

ou bien $a > x_n$

ou bien $x_{i-1} < a \leq x_i$

$$E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + \left| p_i x_i + \dots + x_n p_n \right|$$

$$E(X) = \sum_1 + \sum_2$$

$$\sum_2 = p_i x_i + p_{i+1} x_{i+1} + \dots + p_n x_n$$

$$\sum_2 \geq a(p_i + p_{i+1} + \dots + p_n) \quad (\text{l'égalité a}$$

lieu pour $a = x_i$)

$$E(X) \geq \sum_2 \geq a(p_i + \dots + p_n)$$

$$\underbrace{p_i + p_{i+1} + \dots + p_n}_{P_n(X \geq a)} \leq \frac{E(X)}{a}$$

$$P_n(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

(Remarque: on a aussi $p(X > a) < \frac{E(X)}{a}$ si X n'est pas l'application nulle.)

$$P_2(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

(Inégalité de Markov)

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$$

L'inégalité ci-dessus procure un majorant pour le 1^{er} membre.

Plus généralement, $P_2(Y \geq a) \leq \frac{E(Y)}{a}$

Preons, pour Y , la valeur $Y = (X - \bar{X})^2$

Alors.

$$P_2((X - \bar{X})^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{E[(X - \bar{X})^2]}{\varepsilon^2}$$

$$P_2(|X - \bar{X}| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

avec $\varepsilon > 0$

On pose $\varepsilon = t \cdot \sigma$

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{1}{t} ; \quad \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} = \frac{1}{t^2}$$

$$P_2(|X - \bar{X}| \geq t\sigma) \leq \frac{1}{t^2}$$

Z

$$P_2\left(\left|\frac{X - \bar{X}}{\sigma}\right| \geq t\right) \leq \frac{1}{t^2}$$

avec $\bar{X} = E(X)$

$$\sigma^2 = V(X)$$

$$\varepsilon = t \sigma$$

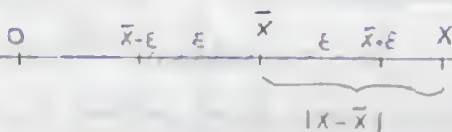
(Remarque: on peut n'even que des inégalités strictes si X n'est pas l'application constante $X = \bar{X}$)

5.6

On rappelle que.

$$P(|X - \bar{X}| \geq \epsilon) \leq \frac{V(X)}{\epsilon^2}$$

Ce majorant est intéressant.



L'événement "contraire" a une probabilité qui, elle sera minorée par $1 - \frac{1}{\epsilon^2}$

$$a \leq 1$$

$$-a \geq -1 \rightarrow \underbrace{1-a}_{\frac{1}{\epsilon^2}} \geq 1 - \frac{1}{\epsilon^2}$$

$$\text{Prob}\left(\frac{|X - \bar{X}|}{\sigma} < t\right) \geq 1 - \frac{1}{t^2}$$

(NB: Cette dernière inégalité montre que $P\left(\frac{|X - \bar{X}|}{\sigma} \leq t\right) \geq 1 - \frac{1}{t^2}$



Application

1

X = nbe de voitures qui passent entre 17 et 18 h en un point donné de l'autoroute. On a observé que $E(X) = 4$ et $V(X) = 10^5$

Déterminer un minorant de la probabilité de l'év

ment. $(3500 < X < 4500)$



$$E = 500 = t \cdot \sigma$$

$$E^2 = 25 \cdot 10^4 = t^2 \cdot 10^5$$

$$25 = 10 t^2 \quad \rightarrow \quad t^2 = 2,5$$

$$\frac{1}{t^2} = \frac{10}{25} = 0,4$$

$$\text{min}^t: 1 - \frac{1}{t^2} = 1 - 0,4 = 0,6$$

$$P_2(|X - \bar{X}| < 500) \geq \frac{60}{100}$$

5% des articles fabriqués par une usine sont défectueux. Minors la probabilité d'avoir moins de 2 articles défectueux dans un échantillon de 10 articles en utilisant l'inégalité de B.T.

X = nombre d'articles défectueux

$$(X < 2) = (X = 0) \cup (X = 1)$$

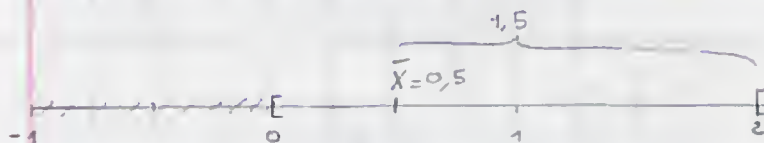
Distribution binomiale. $p = 0,05$

$$q = 0,95$$

$$n = 10$$

$$\bar{X} = 10 \cdot 0,05 = 0,5 = E(X)$$

$$V(X) = 0,5 \cdot 0,95 = 0,475 = \sigma^2$$



$$P(|X - \bar{X}| < \frac{3}{2}) \geq \frac{V(X)}{\epsilon^2} + 1$$

$$\geq \frac{0,475}{2,25} + 1$$

$$\geq 0,79$$

Retour sur l'exercice du "central téléphonique" (cf chap. 12)

majoren $P(X > 8)$

$$E(X) = \bar{X} = 4$$

$$\sigma \simeq 1,96$$

$$V(X) = 3,84$$



$$\epsilon = t \cdot \sigma \Rightarrow t = \frac{\epsilon}{1,96}$$

$$maj^+ = \frac{1}{\epsilon^2} = \frac{3,84}{16} = 0,24$$

6.6

19

Loi des grands nombres

$\left\{ \begin{array}{l} X_1, X_2, \dots, X_n \\ \text{Toutes ces v.a.r. sont } \underline{\text{indépendantes}} \text{ (ex. loi binomiale)} \\ \text{de même espérance et de même variance.} \end{array} \right.$

$$Y_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

$$E(Y_n) = \frac{E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)}{n}$$

ou : loi binomiale

X_i prend les valeurs 0 ou 1.

$$E(X_i) = p$$

$$E(Y_n) = \frac{n p}{n} = p \quad \boxed{E\left(\overbrace{\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}}^{f_n}\right) = p}$$

Dans ce cas $Y_n = f_n =$ fréquence des succès.

$$V(Y_n) = \frac{1}{n^2} \underbrace{V(X_1 + X_2 + \dots + X_n)}_{\text{ici, } V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n)}$$

(cf exercice : var. d'une somme = somme des variances dans le cas où les X_i sont indépendantes.)

$$\begin{aligned} V(Y_n) &= \frac{1}{n^2} \sum V(X_i) = \frac{1}{n^2} n V(X) \\ &= \frac{1}{n} V(X) = \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

$\overbrace{V(X)}$
 S'il s'agit d'une loi binomiale, alors $\sum V(X_i) = n$
 et $V(Y_n) = \frac{1}{n^2} n p q = \frac{pq}{n}$

$$V(Y_n) = \frac{pq}{n}$$

Il s'agit, bien entendu, dans ce dernier cas de
 $Y_n = I_n$.

On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev
 $P_2 \left(|Y_n - E(Y_n)| < \varepsilon \right)$

* Cas général : les X_i sont indépendantes, de même
 espérance, de même variance.

$$P_2 \left(|Y_n - E(Y_n)| < \varepsilon \right) \geq 1 - \frac{V(Y_n)}{\varepsilon^2}$$

$$\text{avec } V(Y_n) = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$P_2 \left(|Y_n - E(Y_n)| < \varepsilon \right) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n \varepsilon^2}$$

* Loi binomiale.

$$P_2 \left(|\bar{f}_n - p| < \varepsilon \right) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}$$

$$1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} \leq P_2 \left(|\bar{f}_n - p| < \varepsilon \right) \leq 1$$

$$\underbrace{n \rightarrow +\infty}_{n \rightarrow +\infty}, \lim_{n \rightarrow +\infty} P_2 \left(|\bar{f}_n - p| < \varepsilon \right) = 1$$

Exercices d'application

Trouver n ? - jeu pile ou face n fois de suite.

« $\bar{f}_n = \frac{1}{2}$ à $\frac{1}{100}$ près » avec une probabilité $\geq 0,9$

Pour réaliser $P_2 \geq 0,9$, il suffit que soit réalisée la circonstance

$$1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} \geq 0,9 \quad \text{car} \quad P_2 \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} \geq 0,9$$

garde inférieure

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{n \cdot 10^{-4}} \geq 0,9$$

$$\frac{1}{4n \cdot 10^{-4}} \leq 1 - 0,9$$

$$\frac{10^4}{4n} \leq 0,1 \quad \rightarrow \quad n \geq \frac{10^4}{4 \cdot 10^{-1}}$$

$$n \geq \frac{10^5}{4} = 25 \cdot 10^3$$

$$n \geq 25\,000$$